MHT201

Quelques indications de TD 9 et TD 10

1 Feuille d'exercices N° 9

Exo. 1. On peut commencer par trouver la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $P(X)$:

$$P(X) = \frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$$

avec a, b, c des coefficients à déterminer. Puis avec un calcul direct, on trouve que

$$a = 1/2, \qquad b = -1, \qquad c = 1/2.$$

Donc

$$P(X) = \frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1/2}{X} + \frac{-1}{X+1} + \frac{1/2}{X+2}.$$

On peut maintenant prouver par récurrence que

$$P^{(n)}(X) = (-1)^n n! \cdot \left(\frac{1/2}{X^{n+1}} + \frac{-1}{(X+1)^{n+1}} + \frac{1/2}{(X+2)^{n+1}} \right).$$

Exo. 2. Remarquons d'abord qu'on a

$$X^2 + \frac{1}{X^2} = \left(X + \frac{1}{X} \right)^2 - 2.$$

Donc, si l'on pose $Y = X + \frac{1}{X}$, on a

$$P(X) = \frac{X^4 + X^3 + X^2 + X + 1}{X^2} = X^2 + X + 1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} = \left(X + \frac{1}{X} \right)^2 + \left(X + \frac{1}{X} \right) - 1.$$

C'est-à-dire, $P(X) = Y^2 + Y - 1$. Puis on résout l'équation

$$Y^2 + Y - 1 = 0$$

il y a donc deux solutions disctinctes : $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Enfin, il s'agit de résoudre les deux équations $Y = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ pour conclure :

$$X + \frac{1}{X} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

qui sont aussi équivalentes à

$$\begin{cases} X^2 - \left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right) X + 1 = 0 \\ X \neq 0. \end{cases}$$

Exo. 3. Le système est éauivalent au système suivant :

$$\begin{cases} ax + 4(a-4)y + 5z = 1 \\ \quad -(a-4)y - z = -1 \\ \quad (a-4)y + 11z = 11 \end{cases}$$

ou encore à

$$\begin{cases} ax + 4(a-4)y + 5z = 1 \\ \quad -(a-4)y - z = -1 \\ \quad 10z = 10 \end{cases}$$

On trouve ainsi $z = 1$. Puis en remplaçant $z = 1$ dans le système précédent, on a

$$\begin{cases} ax + 4(a-4)y = -4 \\ \quad -(a-4)y = 0 \end{cases}$$

Finalement, pour résoudre le système S, il suffit de distinguer les trois cas suivants : (i) $a = 0$; (ii) $a = 4$; (iii) $a \neq 0$ et $a \neq 4$.

Exo. 4. Les seuls sous-espaces vectoriels sont E_1, E_2, E_4.

Exo. 5. (i) Posons $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, et $v_2 = (-1, 1, -4, 2)$. Alors

$$(*) \begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 \\ v_2 = e_1 - e_2. \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} \subset \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3\}$. Réciproquement, comme $e_3 = 2e_1 + 3e_2$, on a $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3\} = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$. Or de la relation $(*)$, on a $e_1 = (v_1 + v_2)/2$, et $e_2 = (v_1 - v_2)/2$, donc $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3\} = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} \subset \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$. D'où

$$\mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3\} = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}.$$

(ii) D'après (i), on a $v_1 \in \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$. En plus, on a $v_1 = \frac{-1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3$, donc, on a également $v_1 \in \mathrm{Vect}\{e_2, e_3, e_4\}$. D'où

$$v_1 \in \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} \cap \mathrm{Vect}\{e_2, e_3, e_4\}.$$

(iii) On a
$$\mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} + \mathrm{Vect}\{e_2, e_3, e_4\} = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3, e_4\},$$
qui est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension ≤ 4. D'autre part, on a vu que
$$2e_1 + 3e_2 - e_3 = 0$$
C'est-à-dire, il existe une relation non triviale entre les vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4, ce qui entraîne que la dimension de $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sur $\mathbb{R}$ est ≤ 3. Par conséquent,
$$\mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subsetneqq \mathbb{R}^4.$$

Exo. 6. Il s'agit de trouver un système d'équations linéaires de 3 inconnues, dont l'ensemble des solutions est exactement $\mathrm{Vect}\{U, V\}$. Comme U, V ne sont pas co-linéaires, ils engendrent un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Donc, il nous faut seulement une équation. Supposons donc qu'elle s'écrit sous la forme suivante :
$$ax + by + cz = 0. \qquad \text{‘}(1)$$
Comme l'ensemble $\mathrm{Vect}\{U, V\}$ est l'ensemble des solutions de (1), on a
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \quad\; b + 2c = 0 \end{cases}$$
D'où
$$\begin{cases} a = r \\ b = -2r \\ c = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$
On peut prendre $x - 2y + z = 0$ (c-a-d, on prend $r = 1$) comme une équation de $\mathrm{Vect}\{U, V\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exo. 7. Notons $v = (x, 1, y, 1) \in \mathbb{R}^4$. Pour que $v \in \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$, il faut et il suffit qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
$$ae_1 + be_2 = v,$$
autrement dit, le système suivant admet un solution
$$S : \begin{cases} a + b = x \\ 2a - 2b = 1 \\ 3a + 3b = y \\ 4a - 4b = 1. \end{cases}$$

Or la première ligne et la dernière ligne de ce système nous donnent deux équations contradictoires, donc le système S n'admet pas de solution. C'est-à-dire, quelque soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a $v \notin \text{Vect}\{e_1, e_2\}$.

Si l'on pose $u = \{x, 1, 1, y\}$. Alors le même raisonnement implique que $u = (x, 1, 1, y) \in \text{Vect}\{e_1, e_2\}$ si et seulement si $x = \frac{1}{3}$, et $y = \frac{1}{2}$, et on a

$$u = (1/3, 1, 1, 1/2) = \frac{5}{12}e_1 - \frac{1}{12}e_2 \in \text{Vect}\{e_1, e_2\}.$$

Exo. 8. On considère la matrice correspondante (donc sa i-ième ligne est le vecteur V_i) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 10 & 4 & 13 & 7 \\ 1 & 7 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

En utilisant les opérations élémentaires de lignes, on trouve que les matrices suivantes sont ligne-équivalentes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 10 & 4 & 13 & 7 \\ 1 & 7 & 8 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 7 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et cette dernière est ligne-équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $u_1 = (1, 0, 0, -1), u_2 = (0, 1, 0, 1), u_3 = (0, 0, 1, 1)$, on a

$$\text{Vect}\{V_1, V_2, V_3, v_4, V_5\} = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}.$$

Donc, si le vecteur $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ appartient à $\text{Vect}\{V_1, V_2, V_3, v_4, V_5\} = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$, on a

$$B = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3.$$

d'où les conditions suivantes vérifiées par les b_i :

$$-b_1 + b_2 + b_3 = b_4.$$

On obtient ainsi l'équation qui définit le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5)$:

$$-x + y + z - w = 0.$$

Exo. 9. On considère la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

on a les ralations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, on a

$F = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)\} = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -2, 0)\}$. $(*)$

D'autre part, pour le sous-espace $\mathrm{Vect}\{(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\}$, on considère la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

qui est ligne-équivalente à

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0. \end{pmatrix}$$

D'où

$$G = \mathrm{Vect}\{(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\} = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, -2, 0)\} \qquad (**)$$

Compte tenu de $(*)$ et de $(**)$, on a $F = G$.

Exo. 10. Il suffit d'utiliser les raisonnements utilisés dans exo. 9.

2 Feuille d'exercice 10.

Exo. 1. (a) vérification directe.
(b) Rappelons que $\mathbb{R}[X]_d$ est l'ensemble des polynômes de degré $\leq d$, qui admet une base $\{1, X, X^2, \cdots, X^d\}$ sur $\mathbb{R}$. Ensuite, pour que $\mathbb{R}[X]_d \subset V$, il faut et il suffit $X^i \in V$ pour $1 \leq i \leq d$. Or on peut vérifier directement que $1 \in V$, $X \in V$, et pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$,

$$X^n \in V \Longleftrightarrow n(n-1) = -2 + 2^n = 2(2^{n-1} - 1).$$

On vérifie que les entiers 2 et 3 satisfont à la condition ci-dessus, autrement dit, on a $X^2 \in V$ et $X^3 \in V$. De la même manière, $X^4 \notin V$. Donc on a $\mathbb{R}[X]_3 \subset V$, mais $\mathbb{R}[X]_4 \subsetneqq V$.
(c) On a $\mathbb{R}[X]_3 \subsetneqq V$. En effet, soient $n \in \mathbb{Z}$ quelconque, f un polynôme de degré $\leq n$:

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$

On a

$$f''(X) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i X^{i-2}.$$

L'égalité $f''(1) = f(0) - 2f(1) + f(2)$ signifie une relation linéaire entre les coefficients a_i :

$$\sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i = a_0 - 2\sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} 2^i a_i.$$

Donc, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}[X]_n$ (c-à-d : $V \cap \mathbb{R}[X]_n$) de l'équation linéaire ci-dessus est de dimension $\dim\mathbb{R}[X]_n - 1$ si $n \geq 4$. Ceci entraîne que le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$:

$$V = \bigcup_n (V \cap \mathbb{R}[X]_n)$$

est de dimension infinie. On en déduit aussitôt que $\mathbb{R}[X]_3 \subsetneqq V$.

Exo. 2. (a) Comme $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3, pour montrer que la famille $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que cette famille est un générateur de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Vect}\{u, v, w\} = \mathbb{R}^3.$$

Pour ceci, on considère la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est ligne-équivalentes aux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Vect}\{u, v, w\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} = \mathbb{R}^3.$$

D'où l'assertion.
(b) Pour calculer les coordonnées du vecteur $(1,0,0)$ dans cette base, il faut trouver les coefficients a, b, c tels que

$$(1,0,0) = au + bv + cw.$$

D'où un système linéaire :

$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ a + b \qquad = 0 \\ a \qquad - c = 0 \end{cases},$$

donc

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Exo. 3. (a) vérification directe.
(b) Remarquons d'abord que la famille $\{u, v, w\}$ est libre si et seulement si le sous-espace $\mathrm{Vect}\{e, u, v\}$ est de dimension 3. Ensuite, on considère la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

qui est ligne-équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{Vect}\{u, v, w\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,0); (0,-3,4)\}$ qui est un sous-espace de dimension 2. En particulier, la famille $\{u, v, w\}$ est liée.

Exo. 4. Il suffit d'utiliser les raisonnements de exo. 3(b).

Exo. 5. Les applications f_1, f_3, f_4, f_5 sont linéaires. Mais f_2 n'est pas linéaire, puisque $f(2 \cdot (1,1)) \neq 2 \cdot f((1,1))$.

Exo. 6. (a) Vérification directe,
(b) On vérifie d'abord que la famille $\{u, v\}$ est libre : en effet, il suffit de remarquer que les deux vecteurs u, v ne sont pas co-linéaires. Puis quelque soit $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ qui est contenu dans le noyau de f. On a $a + b + c = 0$, et par suite

$$w = (a, b, c) = a(1, -1, 0) - c(0, 1, -1) = au - cv.$$

C'est-à-dire, la famille $\{u, v\}$ est un générateur de $\ker(f)$. D'où le fait que $\{u, v\}$ est une base de $\ker(f)$.
(c) Quelque soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$f(x, y, z) = (x+y+z, x+y+z, 2x+2y+2z) = (x+y+z)\cdot(1, 1, 2) = \frac{x+y+z}{5}\cdot(5, 5, 10).$$

Donc le vecteur non nul $w = (5, 5, 10)$ engendre $\mathrm{im}(f)$. Donc la famille $\{w\}$ est une base de $\mathrm{im}(f)$.